SOLUSI POLINOMIAL TAYLOR DARI PERSAMAAN INTEGRAL VOLTERRA

Lisa Anna Nasution[1*], Leli Deswita[2], Endang Lily[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*chachafps23@gmail.com

ABSTRACT

We discuss a polynomial solution of linear and nonlinear Volterra integral equations by stating their solutions in the form of a Taylor series. Furthermore, the coefficients of the Taylor series are determined by solving a system of linear equation. Then by inserting these coefficients into the Taylor series, we obtained a polynomial solution of linear and nonlinear Volterra integral equations in a simple form.

Keywords: *Taylor series, Volterra integral equation, polynomial solution.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas solusi polinomial persamaan integral Volterra linear dan non-linear dengan cara menyatakan solusi persamaan integral Volterra dimaksud dalam bentuk deret Taylor. Selanjutnya ditentukan nilai koefisien dari suku-suku pada deret Taylor dengan menyelesaikan sistem persamaan linear yang terbentuk. Selanjutnya dengan mensubstistusikan koefisien dimaksud ke deret Taylor diperoleh solusi persamaan integral Volterra dalam bentuk sederhana.

Kata kunci: *deret Taylor, persamaan integral Volterra, solusi polinomial.*

1. PENDAHULUAN

Persamaan integral merupakan persamaan yang memuat fungsi takdiketahui yang berada di dalam dan di luar operasi integral . Ada dua jenis persamaan integral yang dikenal, salah satunya persamaan integral Volterra. Persamaan integral Volterra berdasarkan jenisnya terdiri atas persamaan integral volterra jenis pertama dan kedua, dan jenis kedua dibagi lagi atas linear dan nonlinear secara berurutan dengan bentuk umum sebagai berikut

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)g(y)dy, \tag{1}$$

dan

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K[(x,y)]g(y)^2 dy, \tag{2}$$

dimana batas integrasinya yaitu berupa variabel x dan konstanta a. Persoalan yang muncul adalah bagaimana menemukan solusi dari persamaan integral (1) dan (2).

Dari beberapa buku teks dan jurnal, terdapat beberapa teknik yang digunakan untuk memperoleh penyelesaian persamaan integral Volterra diantaranya metode dekomposisi Adomian [6], *Homotopy Perturbation* [1], dan metode lainnya. Namun pada artikel ini diuraikan penyelesaian dengan cara membentuk deret Taylor persamaan (1) dan (2) berderajat N pada $x = c$ yang dinyatakan dalam bentuk

$$g(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} g^{(k)}(c)(x-c)^k \quad a \leq c \leq x, \tag{3}$$

dengan $k = 0, 1, \cdots, N$. Metode ini pertama kali dikemukakan oleh Kanwal dan Liu dalam menyelesaikan persamaan integral Fredholm jenis kedua [2].

Pada artikel ini di bagian dua dibahas uraian penurunan rumus untuk mendapatkan solusi persamaan integral Volterra linear dan nonlinear dalam bentuk polinomial Taylor. Pembahasan ini terdapat pada artikel yang ditulis oleh Mehmet Sezer [4] dengan judul *"Taylor Polynomial Solutions of Volterra Integral Equations"*. Kemudian dilanjutkan dengan bagian tiga mengaplikasikan penggunaan formula polinomial Taylor untuk menyelesaikan persamaan integral Volterra linear dan nonlinear dalam bentuk contoh numerik, dan di bagian empat merupakan kesimpulan.

2. METODE DERET TAYLOR

Berikut ini, akan dijelaskan proses penyelesaian persamaan integral Volterra linear dan nonlinear dalam bentuk polinomial Taylor.

2.1 Persamaan Integral Volterra Linear

Untuk memperoleh penyelesaian dari persamaan (1), terlebih dahulu ditentukan nilai dari tiap suku pada persamaan (3), dengan langkah pertama yaitu melakukan turunan ke-n dari persamaan (1) sehingga diperoleh

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + \lambda I^{(n)}(x), \tag{4}$$

dimana

$$I^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[\int_a^x K(x,y)g(y)dy\right]. \tag{5}$$

Jika $n = 0$, dari persamaan (5) diperoleh

$$I^{(0)}(x) = I(x) = \int_a^x K(x,y)g(y)dy.$$

Kemudian jika $n = 1$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
I^{(1)}(x) &= \frac{d}{dx}\left[\int_a^x K(x,y)g(y)dy\right] \\
&= K(x,x)g(x) + \int_a^x \frac{\partial K(x,y)}{\partial x} g(y)dy \\
&= \left(\frac{\partial^{(0)}K(x,y)}{\partial x^0} g(x)\right)^{(0)} + \int_a^x \frac{\partial K(x,y)}{\partial x} g(y)dy \\
I^{(1)}(x) &= \sum_{i=0}^{0}\left(\frac{\partial^{(i)}K(x,x)}{\partial x^i} g(x)\right)^{(-i)} + \int_a^x \frac{\partial K(x,y)}{\partial x} g(y)dy,
\end{aligned}
$$

dan jika $n = 2$ didapat

$$
\begin{aligned}
I^{(2)}(x) &= \frac{d}{dx}\left(K(x,x)g(x) + \int_a^x \frac{\partial K(x,y)}{\partial x} g(y)dy\right) \\
&= 2\left(\frac{\partial K(x,x)}{\partial x} g(x)\right) + K(x,x)g^{(1)}(x) + \int_a^x \frac{\partial^{(2)}K(x,y)}{\partial x^{(2)}} g(y)dy \\
&= \left(\frac{\partial K(x,x)}{\partial x} g(x) + \right)^{(0)} + \left(\frac{\partial^{(0)}K(x,x)}{\partial x^{(0)}} g(x)\right)^{(1)} + \int_a^x \frac{\partial^{(2)}K(x,y)}{\partial x^{(2)}} g(y)dy \\
I^{(2)}(x) &= \sum_{i=0}^{1}\left(\frac{\partial^{(i)}K(x,x)}{\partial x^{(i)}} g(x)\right)^{(1-i)} + \int_a^x \frac{\partial^{(2)}K(x,y)}{\partial x^{(2)}} g(y)dy.
\end{aligned}
$$

Bila hal ini diteruskan akan diperoleh bentuk umumnya, yaitu, untuk $n \geq 1$,

$$
I^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1}[h_i(x)g(x)]^{(n-i-1)} + \int_a^x \frac{\partial^{(n)}K(x,y)}{\partial x^n} g(y)dy, \tag{6}
$$

dimana

$$
h_i(x) = \left.\frac{\partial^{(i)}K(x,y)}{\partial x^i}\right|_{y=x}. \tag{7}
$$

Dengan mengaplikasikan aturan leibnitz

$$
[h_i(x)g(x)]^{(n-i-1)} = \sum_{m=o}^{n-i-1}\binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-i-1)}(x)g^{(m)}(x), \tag{8}
$$

ke dalam persamaan (6) sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
I^{(n)}(x) = &\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-i-1}\binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-i-1)}(x)g^{(m)}(x) \\
&+ \int_a^x \frac{\partial^{(n)}K(x,y)}{\partial x^n} g(y)dy,
\end{aligned}
$$

atau

$$I^{(n)}(x) = \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-m-1}\binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-i-1)}(x) g^{(m)}(x) + \int_a^x \frac{\partial^{(n)} K(x,y)}{\partial x^n} g(y)dy, \tag{9}$$

dimana

$$\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-m-1}(\cdots) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-i-1}(\cdots).$$

Langkah berikutnya yaitu substitusi $x = c$ pada persamaan (4) dan persamaan (9) sehingga diperoleh secara berturut-turut

$$g^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + \lambda I^{(n)}(c), \tag{10}$$

dan

$$I^{(n)}(c) = \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-m-1}\binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-i-1)}(c) g^{(m)}(c) + \int_a^x \frac{\partial^{(n)} K(x,y)}{\partial x^n} g(y)dy. \tag{11}$$

Kemudian ekspansi Taylor dari $g(y)$ disekitar $y = c$, yaitu

$$g(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} g^{(m)}(c)(y-c)^m,$$

disubstitusikan ke dalam persamaan (10), sehingga diperoleh

$$g^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + \lambda \sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-m-1}\binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-i-1)}(c) g^{(m)}(c) + \lambda \int_a^c \left.\frac{\partial^{(n)} K(x,y)}{\partial x^n}\right|_{x=c} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} g^{(m)}(c)(y-c)^m\right] dy$$

atau

$$g^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + \lambda \left[\sum_{m=0}^{n-1} (H_{(nm)} + T_{(nm)}) g^{(m)}(c) + \sum_{m=0}^{\infty} T_{(nm)} g^{(m)}(c)\right], \tag{12}$$

dimana untuk $n = 0$ berlaku

$$\sum_{m=0}^{n-1} (H_{(nm)} + T_{(nm)}) g^{(m)}(c) = 0,$$

untuk $n = 1, 2, 3, \cdots, m = 0, 1, 2, \cdots, n-1, (n > m)$ berlaku

$$H_{(nm)} = \sum_{i=0}^{n-m-1} \binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-i-1)}(c), \tag{13}$$

untuk $n \leq m$ berlaku

$$H_{(nm)} = 0,$$

dan untuk $n, m = 0, 1, 2, \cdots$ berlaku

$$T_{(nm)} = \frac{1}{m!} \int_a^c \frac{\partial^{(n)} K(x,y)}{\partial x^n}\bigg|_{y=x} (y-c)^m dy. \tag{14}$$

Jika ditinjau secara langsung persamaan (12) menghasilkan persamaan linear takhingga, maka diasumsikan bahwa persamaan integral (1) diaproksimasikan ke polinomial Taylor berderajat N dengan $n, m = 0, 1, 2, \cdots, N$. Dengan demikian persamaan (12) menjadi sebuah sistem dari $N+1$ persamaan linear untuk $N+1$ koefesien takdiketahui $g^{(0)}(c), g^{(1)}(c), \cdots, g^{(N)}(c)$. Persamaan (12) dapat dibentuk menjadi sebuah persamaan matriks yaitu

$$\mathbf{TG} + \mathbf{F} = 0, \tag{15}$$

dimana

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda T_{(00)} - 1 & \lambda T_{(01)} & \cdots & \lambda T_{(0N)} \\ \lambda(H_{(10)} + T_{(10)}) & \lambda T_{(11)} - 1 & \cdots & \lambda T_{(1N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(H_{(N0)} + T_{(N0)}) & \lambda(H_{(N1)} + T_{(N1)}) & \cdots & \lambda T_{(NN)} - 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g^{(0)}(c) \\ g^{(1)}(c) \\ \vdots \\ g_{(N)}(c) \end{bmatrix}$$

dan

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f^{(0)}(c) \\ f^{(1)}(c) \\ \vdots \\ f^{(N)}(c) \end{bmatrix}$$

Jika $\det(\mathbf{T}) \neq 0$, berarti bahwa sistem tersebut mempunyai solusi tunggal, sehingga dapat ditulis ke dalam bentuk

$$\mathbf{G} = -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}. \tag{16}$$

Dari persamaan (16) diperoleh nilai-nilai koefesien untuk $g^{(n)}(c)(n = 0, 1, \cdots, N)$, dengan demikian diperoleh solusi untuk persamaan integral Volterra linear yaitu

$$g(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} g^{(n)}(c)(x-c)^n, \tag{17}$$

2.2 Persamaan Integral Volterra Nonlinear

Pada penyelesaian persamaan integral Volterra nonlinear, pertama substitusikan

$$G(y) = [g(y)^2], \tag{18}$$

ke dalam persamaan (2) dan ikuti prosedur pada persamaan integral Volterra berbentuk linear. Sehingga diperoleh

$$g^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + \lambda\Bigg[\sum_{m=0}^{n-1}(H_{(nm)} + T_{(nm)})G^{(m)}(c) + \sum_{m=0}^{\infty} T_{(nm)}G^{(m)}(c)\Bigg], \tag{19}$$

dimana, untuk $n = 0$ diperoleh

$$\sum_{m=0}^{n-1}(H_{(nm)} + T_{(nm)})G^{(m)}(c) = 0,$$

untuk $n \leq m$ diperoleh

$$H_{(nm)} = 0,$$

dan nilai $H_{(nm)}(n = 1, 2, 3, \cdots; m = 0, 1, 2, \cdots, n-1; n > m)$ dan $T_{(nm)}(n = 0, 1, 2, \cdots)$ didefinisikan pada persamaan (13) dan (14). Sedangkan nilai $G^{(m)}(c), (m = 0, 1, 2, \cdots)$ pada persamaan (19) dapat ditentukan dengan menerapkan aturan leibnitz terhadap fungsi berikut

$$G(y) = [g(y)]^2 = \Bigg[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}g^{(m)}(c)(y-c)^m\Bigg]^2,$$

sehingga diperoleh nilai $G^{(m)}(c)$ yaitu

$$G^{(m)}(c) = \binom{m}{i} g^{(m-i)}(c)g^{(i)}(c). \tag{20}$$

Kemudian dengan mengambil $n, m = 0, 1, 2, \cdots, N$, maka persamaan (19) dapat ditulis

$$\begin{aligned} g^{(0)}(c) =& f^{(0)}(c) + \lambda\sum_{m=0}^{N} T_{(0m)}G^{(m)}(c) \\ g^{(n)}(c) =& f^{(n)}(c) + \lambda\Bigg[\sum_{m=0}^{n-1}(H_{(nm)} + T_{(nm)})G^{(m)}(c) + \sum_{m=n}^{N} T_{(nm)}G^{(m)}(c)\Bigg], \end{aligned} \tag{21}$$

dengan

$$\begin{aligned} n =& 1, 2, \cdots, N \\ m =& 0, 1, \cdots, N \end{aligned}$$

yang menyatakan sebuah sistem dengan $N + 1$ persamaan nonlinear untuk $N + 1$ koefesien takdiketahui $g^{(0)}(c), \cdots, g^{(N)}(c)$.

Persamaan (21) dapat dibentuk ke dalam matriks berikut

$$\mathbf{G} - \mathbf{TG^*} = \mathbf{F}, \tag{22}$$

dimana $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}$, dan $\mathbf{T}$ adalah matriks yang ditunjukkan persamaan (15) dan $\mathbf{G^*}$ adalah matriks kolom,

$$\mathbf{G^*} = \begin{bmatrix} G^{(0)}(c) \\ G^{(1)}(c) \\ \vdots \\ G^{(N)}(c) \end{bmatrix}$$

dengan elemen - elemen pada $\mathbf{G^*}$ diberikan oleh persamaan (20).

Seperti pembahasan pada bentuk linear, dapat dipilih substitusi $c = a$, sehingga persamaan (21) dapat ditulis menjadi relasi rekurensi berikut

$$\begin{aligned} g^{(0)}(a) =& f^{(0)}(a) \\ g^{(n)}(a) =& f^{(n)}(a) + \lambda \sum_{m=0}^{n-1} H_{(nm)} G^{(m)}(a) \\ n =& 1, 2, \cdots, N. \end{aligned} \tag{23}$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (23) diperoleh solusi polinomial Taylor untuk persamaan integral Volterra nonlinear yaitu

$$g(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} g^{(n)}(c)(x-c)^n, \tag{24}$$

3. CONTOH NUMERIK

Berikut ini akan diberikan dua contoh numerik sebagai aplikasi penggunaan formula polinomial Taylor dalam menyelesaikan persamaan integral Volterra berbentuk linear dan nonlinear.

Contoh 1 Perhatikan persamaan integral Volterra linear berikut

$$g(x) = 1 + x + \lambda \int_0^x (x-y) g(y) dy, \tag{25}$$

dan aproksimasikan fungsi $g(x)$ menggunakan polinomial Taylor berderajat lima, dengan

$$f(x) = 1 + x, \quad K(x,y) = x - y, \quad a = 0, \quad N = 5.$$

Penyelesaian.
Misalkan $c = a = 0$. Pada kasus ini, dari hubungan kedua persamaan yaitu persamaan (7) dan (13), diperoleh nilai $H_{(nm)}$ yaitu

$$\begin{matrix} H_{(10)} = 0 & H_{(20)} = 1 & H_{(21)} = 0 & H_{(30)} = 0 & H_{(31)} = 1 \\ H_{(32)} = 0 & H_{(40)} = 0 & H_{(41)} = 0 & H_{(42)} = 1 & H_{(43)} = 0 \\ H_{(50)} = 0 & H_{(51)} = 0 & H_{(52)} = 0 & H_{(53)} = 1 & H_{(54)} = 0 \end{matrix} \tag{26}$$

Catatan: Nilai $H_{(31)}$ merupakan koreksi terhadap referensi [4].

Dari persamaan (14), diperoleh

$$T_{(nm)} = 0, \quad \text{untuk} \quad n = m = 0, 1, \cdots, 5. \tag{27}$$

Nilai turunan dari $f(x)$ pada $x = c = 0$ dengan $n = 0, 1, 2, \cdots, 5$ yaitu

$$f^{(0)}(0) = 1, \quad f^{(1)}(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = f^{(5)}(0) = 0. \tag{28}$$

Kemudian, substitusi persamaan (26), (27), dan (28) ke dalam persamaan matriks (15) sehingga diperoleh

$$\mathbf{T}\,\mathbf{G} = -\mathbf{F}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^{(0)}(0) \\ g^{(1)}(0) \\ g^{(2)}(0) \\ g^{(3)}(0) \\ g^{(4)}(0) \\ g^{(5)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solusi dari persamaan matriks ini adalah

$$\begin{aligned} &g^{(0)}(0) = 1, \quad g^{(1)}(0) = 1, \quad g^{(2)}(0) = g^{(3)}(0) = \lambda, \\ &g^{(4)}(0) = g^{(5)}(0) = \lambda^2. \end{aligned} \tag{29}$$

Kemudian substitusi nilai-nilai pada persamaan (29) ke dalam persamaan (17), sehingga diperoleh solusi polinomial Taylor untuk persamaan (25) yaitu

$$g(x) = 1 + x + \lambda \left[\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right] + \lambda^2 \left[\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \right], \tag{30}$$

yang mana enam suku pertama persamaan (30) mempunyai nilai yang sama dengan solusi eksak yaitu $g(x) = e^{(x)}$ untuk $\lambda = 1$ [3, h. 36].

Contoh 2 Contoh kedua adalah persamaan integral volterra nonlinear

$$g(x) = e^{(x)} - (x+1)\sin(x) + \int_{-1}^{x} \sin(x) e^{(-2y)} [g(y)]^2 dy, \tag{31}$$

yang mana mempunyai solusi eksak $g(x) = e^{(x)}$. Contoh yang sama juga telah diselesaikan oleh Shimasaki dan Kiyono menggunakan deret Chebyshev [5].

Penyelesaian.

Lakukan prosedur yang sama pada pembahasan Contoh 1 dengan mengambil $N = 7$, dan $c = a = -1$, maka kita punyai hasil untuk nilai $h_i^{(k)}(0), k = 0, 1, \cdots, 6$:

$$
\begin{aligned}
h_0^{(0)}(-1) &= h_2^{(0)}(-1) = h_4^{(0)}(-1) = h_6^{(0)}(-1) = -e^{(2)}\sin(1) \\
h_0^{(1)}(-1) &= h_2^{(1)}(-1) = h_4^{(1)}(-1) = h_6^{(1)}(-1) = e^{(2)}(\cos(1) + 2\sin(1)) \\
h_0^{(2)}(-1) &= h_2^{(2)}(-1) = h_4^{(2)}(-1) = h_6^{(2)}(-1) = e^{(2)}(-4\cos(1) - 3\sin(1)) \\
h_0^{(3)}(-1) &= h_2^{(3)}(-1) = h_4^{(3)}(-1) = h_6^{(3)}(-1) = e^{(2)}(11\cos(1) + 2\sin(1)) \\
h_0^{(4)}(-1) &= h_2^{(4)}(-1) = h_4^{(4)}(-1) = h_6^{(4)}(-1) = e^{(2)}(-24\cos(1) + 7\sin(1)) \\
h_0^{(5)}(-1) &= h_2^{(5)}(-1) = h_4^{(5)}(-1) = h_6^{(5)}(-1) = e^{(2)}(41\cos(1) - 38\sin(1)) \\
h_0^{(6)}(-1) &= h_2^{(6)}(-1) = h_4^{(6)}(-1) = h_6^{(6)}(-1) = e^{(2)}(-44\cos(1) + 117\sin(1)) \\
h_1^{(0)}(-1) &= h_3^{(0)}(-1) = h_5^{(0)}(-1) = e^{(2)}\cos(1) \\
h_1^{(1)}(-1) &= h_3^{(1)}(-1) = h_5^{(1)}(-1) = e^{(2)}(-2\cos(1) + \sin(1)) \\
h_1^{(2)}(-1) &= h_3^{(2)}(-1) = h_5^{(2)}(-1) = e^{(2)}(3\cos(1) - 4\sin(1)) \\
h_1^{(3)}(-1) &= h_3^{(3)}(-1) = h_5^{(3)}(-1) = e^{(2)}(-2\cos(1) + 11\sin(1)) \\
h_1^{(4)}(-1) &= h_3^{(4)}(-1) = h_5^{(4)}(-1) = e^{(2)}(-7\cos(1) - 24\sin(1)) \\
h_1^{(5)}(-1) &= h_3^{(5)}(-1) = h_5^{(5)}(-1) = e^{(2)}(38\cos(1) + 41\sin(1)) \\
h_1^{(6)}(-1) &= h_3^{(6)}(-1) = h_5^{(6)}(-1) = e^{(2)}(-117\cos(1) - 44\sin(1)).
\end{aligned}
$$

Kemudian substitusi nilai-nilai $h_i^{(k)}(0), k = 0, 1, \cdots, 6$ yang diperoleh untuk mendapatkan nilai-nilai $H_{(nm)}, n = 1, 2, \cdots, 7, m = 0, 1, \cdots, 7$ dengan menggunakan formula pada persamaan (13)($n \leq m$), diperoleh

$$
\begin{aligned}
H_{(10)} &= H_{(21)} = H_{(32)} = H_{(54)} = H_{(65)} = H_{(43)} = H_{(76)} = -e^{(2)}\sin(1) \\
H_{(20)} &= e^{(2)}(2\cos(1) + 2\sin(1)) \\
H_{(30)} &= e^{(2)}(-6\cos(1) - \sin(1)) \\
H_{(31)} &= e^{(2)}(3\cos(1) + 4\sin(1)) \\
H_{(40)} &= e^{(2)}(12\cos(1) - 4\sin(1)) \\
H_{(41)} &= e^{(2)}(-16\cos(1) - 6\sin(1)) \\
H_{(42)} &= e^{(2)}(4\cos(1) + 6\sin(1)) \\
H_{(50)} &= e^{(2)}(-20\cos(1) + 19\sin(1)) \\
H_{(51)} &= e^{(2)}(50\cos(1) - 8\sin(1)) \\
H_{(52)} &= e^{(2)}(-30\cos(1) - 14\sin(1)) \\
H_{(53)} &= e^{(2)}(5\cos(1) + 8\sin(1)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{(60)} &= e^{(2)}(22\cos(1) - 58\sin(1))\\
H_{(61)} &= e^{(2)}(-112\cos(1) + 85\sin(1))\\
H_{(62)} &= e^{(2)}(124\cos(1) - 10\sin(1))\\
H_{(63)} &= e^{(2)}(-48\cos(1) - 25\sin(1))\\
H_{(64)} &= e^{(2)}(6\cos(1) + 10\sin(1))\\
H_{(70)} &= e^{(2)}(14\cos(1) + 139\sin(1))\\
H_{(71)} &= e^{(2)}(161\cos(1) - 340\sin(1))\\
H_{(72)} &= e^{(2)}(-350\cos(1) + 229\sin(1))\\
H_{(73)} &= e^{(2)}(245\cos(1) - 8\sin(1))\\
H_{(74)} &= e^{(2)}(-70\cos(1) - 39\sin(1))\\
H_{(75)} &= e^{(2)}(7\cos(1) + 12\sin(1)).
\end{aligned}
$$

Selanjutnya diperoleh nilai turunan $f(x)$ terhadap $x = -1$ ($f^{(n)}(-1)$ dengan $n = 0, 1, \cdots, 7$), yaitu

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(-1) &= e^{(-1)}\\
f^{(1)}(-1) &= e^{(-1)} + \sin(1)\\
f^{(2)}(-1) &= e^{(-1)} - 2\cos(1)\\
f^{(3)}(-1) &= e^{(-1)} - 3\sin(1)\\
f^{(4)}(-1) &= e^{(-1)} + 4\cos(1)\\
f^{(5)}(-1) &= e^{(-1)} + 5\sin(1)\\
f^{(6)}(-1) &= e^{(-1)} - 6\cos(1)\\
f^{(7)}(-1) &= e^{(-1)} - 7\sin(1)
\end{aligned}
$$

Kemudian substitusi nilai $H_{(nm)}$ dan $f^{(n)}(-1)$ ke dalam persamaan (23), dan gunakan hasil tersebut dan relasi (20), sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
&g^{(0)}(-1) = f^{(0)}(-1) = e^{(-1)} & &\\
&G^{(0)}(-1) = e^{(-2)} & &g^{(1)}(-1) = e^{(-1)}\\
&G^{(1)}(-1) = 2e^{(-2)} & &g^{(2)}(-1) = e^{(-1)}\\
&G^{(2)}(-1) = 4e^{(-2)} & &g^{(3)}(-1) = e^{(-1)}\\
&G^{(3)}(-1) = 8e^{(-2)} & &g^{(4)}(-1) = e^{(-1)}\\
&G^{(4)}(-1) = 16e^{(-2)} & &g^{(5)}(-1) = e^{(-1)}\\
&G^{(5)}(-1) = 32e^{(-2)} & &g^{(6)}(-1) = e^{(-1)}\\
&G^{(6)}(-1) = 64e^{(-2)} & &g^{(7)}(-1) = e^{(-1)}
\end{aligned}
$$

Dengan demikian diperoleh solusi polinomial Taylor untuk persamaan integral Volterra nonlinear berdasarkan formula pada persamaan (24) yaitu

$$g(x) = \sum_{n=0}^{7} \frac{e^{(-1)}}{n!}(x+1)^n, \tag{32}$$

yang mana tujuh suku pertama persamaan (32) mempunyai nilai yang sama dengan solusi eksaknya yaitu $g(x) = e^{(x)}$ pada $x = -1$.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dikemukakan sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa metode deret Taylor dapat menyelesaikan persoalan persamaan integral, tanpa melakukan penghitungan integral, dalam hal ini peran penting dari aturan Leibnitz. Persamaan integral Volterra yang dibahas adalah jenis kedua yang dibagi lagi dalam bentuk persamaan integral Volterra linear dan nonlinear. Pada pembahasan ini, dilakukan aproksimasi fungsi $g(x)$ oleh polinomial Taylor berderajat N. Solusi yang diperoleh untuk bentuk linear dan nonlinear mempunyai bentuk umum deret Taylor yang sama, namun dalam proses memperoleh nilai-nilai yang takdiketahui di dalam deret Taylor tersebut yang berbeda, aplikasinya dapat dilihat pada bagian contoh numerik. Solusi deret yang diperoleh menunjukkan kesamaan dengan solusi eksak pada beberapa suku pertama dari hasil aproksimasi polinomial Taylor, ini menunjukkan bahwa tingkat keakuratan yang sangat tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Biazar, J. & Eslami, M. 2011. Homotopy Perturbation and Taylor Series for Volterra Integral Equations of The Second Kind. *Middle-East Journal of Scientific Research 7*, **4**: 604-609.

[2] Kanwal, R. P. & Liu K. C. 1989. A Taylor Expansion Approach for Solving Integral Equation. *Int. J. Mat Educ. Sci. Techno.*, **20**: 411–414.

[3] Kanwal, R. P. 1971. *Linear Integral Equations.* Academic Press, New York.

[4] Sezer, M. 1994. Taylor Polynomial Solutions of Volterra Integral Equations. *Int. J. Mat Educ. Sci. Techno.*, **25**: 625–633.

[5] Shimasaki, M. & Takeshi, K. 1973. Numerical Solution of Integral Equation in Chebyshev Series. *Numer. Math*, **21**: 373–380.

[6] Wazwaz, A. M. 2011. *Linear and Nonlinear integral Equations.* Springer, New York.